www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

CONCOURS 1989 **OPTION M**

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES II

DURÉE : 4 heures

Les deux parties du problème ne sont pas indépendantes, cependant il est tout à fait possible d'admettre certains résultats donnés par l'énoncé pour aborder II sans avoir complètement terminé I.

Il sera tenu le plus grand compte de la rigueur des démonstrations et de la ***présentation.*** *En particulier toute question devra commencer par un titre annonçant ce qui va être démontré et devra se terminer par une conclusion.*

Dans tout le problème, **E** désigne un C-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$. On note GL(**E**) le groupe (pour la composition des applications) des automorphismes de **E** et SL(**E**) l'ensemble des endomorphismes de **E** de déterminant + 1. $\mathrm{Id}_{\mathbf{E}}$ désigne l'application identité de **E**. On appelle involution de **E** un automorphisme u de **E** tel que $u \circ u = \mathrm{Id}_{\mathbf{E}}$. $\mathbf{E}^*$ désigne le dual de **E**.

On appelle transvection de **E** un automorphisme t de **E** différent de $\mathrm{Id}_{\mathbf{E}}$ possédant les deux propriétés suivantes :

(1) Il existe un hyperplan **H** de **E** tel que : $\forall\, x \in \mathbf{H} \qquad t(x) = x.$

(2) $\forall\, x \in \mathbf{E} \qquad t(x) - x \in \mathbf{H}.$

I

1. Montrer que SL(**E**) est un sous-groupe de GL(**E**).

2. Montrer qu'un sous-espace vectoriel **H** de **E** est un hyperplan de **E** si et seulement s'il existe une forme linéaire non nulle $\phi \in \mathbf{E}^*$ telle que **H** soit le noyau de ϕ. (On dira que ϕ définit l'hyperplan **H**.)

   Que peut-on dire de deux formes linéaires définissant le même hyperplan ?

3. Montrer que si $\mathbf{F}_1$ et $\mathbf{F}_2$ sont deux sous-espaces vectoriels de **E** :

   $$\dim(\mathbf{F}_1) + \dim(\mathbf{F}_2) = \dim(\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2) + \dim(\mathbf{F}_1 \cap \mathbf{F}_2).$$

4. Soit t une transvection de **E**.

   a. On se propose de démontrer ici que l'hyperplan **H** apparaissant dans la définition de t est unique (on l'appellera alors hyperplan de la transvection).

   Pour cela on suppose qu'il existe deux hyperplans distincts $\mathbf{H}_1$ et $\mathbf{H}_2$ vérifiant (1) pour la transvection t. Que peut-on dire de $\mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2$? Conclure.

   b. Prouver qu'il existe une droite vectorielle unique **D** contenue dans **H** telle que :

   (3) $\forall\, x \in \mathbf{E} \qquad t(x) - x \in \mathbf{D},$

   D est appelée droite de la transvection t.

   c. Si ϕ est une forme linéaire définissant **H**, trouver un vecteur a de **E** tel que :

   (4) $\forall\, x \in \mathbf{E} \qquad t(x) = x + \phi(x) \cdot a.$

   d. Réciproquement, montrer que si ϕ est une forme linéaire non nulle sur **E** et a un vecteur non nul du noyau de ϕ, l'application t :

   $$x \longmapsto x + \phi(x) \cdot a$$

   est une transvection de **E** dont on déterminera l'hyperplan et la droite.

5. Montrer que les transvections d'hyperplan **H** donné constituent, avec l'identité de **E**, un groupe T(**H**) pour la composition des applications isomorphe au groupe additif de **H**.

6. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que deux transvections commutent. En déduire que GL(**E**) n'est pas commutatif.

II

1. Soit u une involution de **E**.

   a. Que peut-on dire des valeurs propres de u ?

   b. u est-elle diagonalisable ?

   On appelle involution minimale, une involution dont le sous-espace propre relatif à la valeur propre + 1 est de dimension 1.

   c. Montrer que si u est une involution minimale, on peut trouver une forme linéaire non nulle θ et un vecteur a tels que :

   (5) $\forall\, x \in \mathbf{E} \qquad u(x) = -x + \theta(x) \cdot a.$

   d. Montrer qu'une transvection est la composée de deux involutions minimales ayant un sous-espace propre commun.

Tournez la page S.V.P.

2. Déduire de II.1. le déterminant d'une transvection.

3. Soit t une transvection de **E** et σ un automorphisme de **E**. Montrer que $\sigma \circ t \circ \sigma^{-1}$ est une transvection de **E**. Déterminer son hyperplan et sa droite. Prouver que si t et t' sont deux transvections de **E**, il existe un automorphisme σ de **E** tel que :

$$t' = \sigma \circ t \circ \sigma^{-1}.$$

Montrer que si $n \geqslant 3$, on peut choisir $\sigma \in SL(\mathbf{E})$.

4. **E** étant rapporté à une base $\beta = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$, on désigne par I_n la matrice identité d'ordre n et, pour tout couple d'entiers (i, j) tels que $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant n$, par E_{ij} la matrice carrée d'ordre n ayant tous ses éléments nuls sauf celui situé à la $i^{\text{ième}}$ ligne et la $j^{\text{ième}}$ colonne qui vaut 1.

   a. Montrer que, si $i \neq j$, $B_{ij}(\lambda) = I_n + \lambda E_{ij}$ est la matrice, dans la base β, d'une transvection de **E**. Déterminer son hyperplan et sa droite.

   b. Si M est une matrice carrée d'ordre n, expliquer comment la matrice produit $B_{ij}(\lambda) \cdot M$ se déduit de la matrice M.

5. Soit M une matrice carrée d'ordre n inversible. Montrer qu'il existe une matrice B, produit de matrices $B_{ij}(\lambda)$ $(i \neq j)$ telle que le produit $B \cdot M$ soit une matrice triangulaire supérieure dont les éléments de la diagonale sont tous égaux à 1 sauf celui situé à la dernière ligne et la dernière colonne dont on donnera la valeur.

6. Déduire de ce qui précède que les transvections engendrent le groupe SL(**E**).

7. Déterminer les éléments de SL(**E**) qui commutent avec les transvections. En déduire le centre Z de SL(**E**) (ensemble des éléments de SL(**E**) qui commutent avec tous les éléments de SL(**E**)). Montrer que Z est un groupe cyclique.

Cette place étant vide ...
pourquoi ne pas l'inaugurer ?

Ce sera la PLACE

AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY

né à Paris le 21 Aout 1789

dont on pourrait fêter cette année le bicentenaire !

Il ne fut certes pas révolutionnaire en politique : né trop tard pour connaitre la vieille monarchie il aspira à en connaitre une nouvelle.

Son nom est pourtant attaché à une des institutions remarquables que nous a légué la Révolution :

L'ECOLE POLYTECHNIQUE

pour laquelle il rédigea son Cours.

Révolutionnaire en Mathématiques ?

voilà un sujet de réflexion et de dissertation !

Ce qui est certain c'est qu'il s'est taillé un Empire dans les cours de mathématiques de Taupe !

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail